

22) p 397

si $a \mid 5n+31$ et $a \mid 3n+12$ alors $a \mid 3(5n+31) - 5(3n+12)$

soit $a \mid 33$; donc $a \mid 3$ ou $a \mid 11 \rightarrow a = 1; 3; 11; 33$

22 p 397

$$a = 1 : n \in \mathbb{N}$$

$$a = 3 : 3 \mid 5n+31 \text{ et } 3 \mid 3n+12$$

↓

$$3 \mid 3(n+4) \text{ OK toujours}$$

$$5n+31 = k_3$$

$$n = \frac{k_3 \times 3 - 31}{5}$$

$$\text{premier} = 12$$

$$n = \frac{(12+m) \times 3 - 31}{5}$$

$$n = \frac{12 \times 3 + m \times 3 - 31}{5}$$

$$n = \frac{5 + m \times 3}{5}$$

$$n = 1 + \frac{m \times 3}{5}$$

$$5 \mid m$$

$$\text{d'où } m = 1 + k_1 \times 3$$

$$a = 11$$

$$11 \mid 5n+31 \text{ et } 11 \mid 3n+12$$

$$5n+31 = k_1 \times 11 \text{ et } 3n+12 = k_2 \times 11$$

$$n = \frac{k_1 \times 11 - 31}{5}$$

$$n = \frac{k_2 \times 11 - 12}{3}$$

$$\frac{k_1 \times 11 - 31}{5} = \frac{k_2 \times 11 - 12}{3}$$

$$33k_1 - 93 = 55k_2 - 60$$

$$33k_1 = 55k_2 + 33$$

$$k_1 = \frac{55}{33} k_2 + 1$$

$$k_1 = \frac{5}{3} k_2 + 1$$

$$k_2 \text{ multiple de } 3 = m \times 3$$

$$k_1 = \frac{5}{3} m \times 3 + 1 = 5m + 1$$

m	k ₁	k ₂	n(k ₁)	n(k ₂)	5m+31	3m+12
0	/	/	/	/		
1	6	3	7	7	66	33
2	11	6	18	18	121	66
3	16	9	29	29	176	99

$$(23 \text{ p } 397) \text{ si } a \mid 42n+37 \text{ et } a \mid 7n+4$$

$$\text{alors, } a \mid (42n+37) - 6(7n+4)$$

$$\text{et } a \mid 13 \quad \text{donc } a = 1 \text{ ou } a = 13$$

$$\text{si } a = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{si } a = 13 \quad 13 \mid 42n+37 \text{ et } 13 \mid 7n+4$$

$$\text{donc } 42n+37 = 13k_1 \text{ et } 7n+4 = 13 \times k_2$$

$$n = \frac{13k_1 - 37}{42} \quad \text{et } n = \frac{13k_2 - 4}{7}$$

$$\text{d'où } \frac{13k_1 - 37}{42} = \frac{13k_2 - 4}{7}$$

$$\text{donc } 13k_1 - 37 = 6 \times (13k_2 - 4)$$

$$13k_1 = 78k_2 + 13$$

$$k_1 = \frac{78k_2}{13} + 1$$

$$k_1 = 6k_2 + 1$$

$$\text{premier } k_2 = 3 \quad \text{donc } k_1 = 19$$

$$m \in \mathbb{N} : k_2 = 3 + m \times 7 \quad \text{et donc } k_1 = 6(3 + m \times 7) + 1$$

$$k_1 = 6k_2 + 1$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 3 + \alpha \\ \frac{13(3 + \alpha) - 4}{7} \\ &= \frac{39 + 13\alpha - 4}{7} \\ &= 5 + \frac{13\alpha}{7} \\ &\text{donc } 7 \mid \alpha \end{aligned}$$

m	k ₁	k ₂	m(k ₁)	m(k ₂)
0	19	3	5	5
1	61	10	18	18
2	103	17	31	31

T.SVP →

(26 p 397)

1) si $d \mid n$ et $d \mid n+1$ alors $d \mid 1(n+1) - 1(n)$
d'où $d \mid 1$ donc $d = 1$ et n et $n+1$ premiers entre eux.

2) $\frac{n}{2n+1}$

si $d \mid n$ et $d \mid 2n+1$ alors $d \mid 1(2n+1) - 2(n)$

d'où $d \mid 1$ donc n et $2n+1$ premiers entre eux

et $\frac{n}{2n+1}$ irréductible

3) idem si $d \mid m$ et $d \mid kn+1$ alors $d \mid 1(kn+1) - k(n)$
d'où $d \mid 1$ et $d = 1$ donc $\frac{n}{2n+1}$ irréductible

(26 p 397)

$$(a^2 + 2b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4$$

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

$$a^2 + 2b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 = (a-b)^2 + b^2 \geq 4$$

$$a^2 + 2b^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 = (a+b)^2 + b^2 \geq 20$$

(27 p 397)

$$m = 7^k$$

$$\text{nombre de diviseurs} = (k+1) = 5 \quad k = 4$$

$$m = 7^4 \rightarrow \text{diviseurs} = 1; 7; 7^2; 7^3; 7^4$$

(28 p 397)

$$\begin{array}{r|l} 616 & 2 \\ 308 & 2 \\ 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$616 = 2^3 \times 7 \times 11$$

$$n = k \times 616 = k \times 2^3 \times 7 \times 11$$

$$\hookrightarrow k = 2 \times 7 \times 11$$

$$m = 2^4 \times 7^2 \times 11^2$$

TSVP $\longrightarrow$

28 p 397 $m = a^k \times b^l \times c^m \dots$ $k, l, m = 1$
 a, b, c premiers

30 p 397 $m = a \times b \rightarrow 1; a; b; a \times b$ donc pas possible
 $m = a^2 \rightarrow 1; a; a^2$

31 p 397 $m^2 - n^2$ premier $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$
 $= 1$ pour que $m^2 - n^2$ premier
donc $m = n+1$, m et n consécutifs

32 p 397 $m = 2^{k_1} \times 5^{k_2}$ six diviseurs $\rightarrow (k_1+1)(k_2+1) = 6$

1×6

2×3

3×2

6×1

18 diviseurs

1×18

2×9

3×6

6×3

9×2

18×1

25 p 397 $\frac{5m+3}{m+2}$ entier $= \frac{5m+10-7}{m+2} = 5 - \frac{7}{m+2}$; $n+2 \mid 7$
 $n+2 \leq 7$
 $m = 5$

38 p 398 $394 = k \times 17 + r$ $r < 6$

$394 : 17 = 23, \dots$ $394 - 23 \times 17 = 3$

$394 - 22 \times 17 = 20$

$394 - 21 \times 17 = 37$ car $37 > 21$

42 p 398

$1 = 4 \times 0 + 1$

$3 = 4 \times 0 + 3$

$5 = 4 \times 1 + 1$

$7 = 4 \times 1 + 3$

$(4k)$

$5 + 2k \leftarrow k \text{ pair}$
 $5 + 2k = 4 \times 1 + 2 \times 2m + 1$

$5 + 2k = 4(1+m) + 2$

$(4k+2)$ k impair $4k+2$

$5 + 2k = 4 \times 1 + 2k + 1$ pair

$5 + 2k = 4 \times 1 + 2(k-1) + 2 + 1$

$5 + 2k = 4 \times 1 + 2 \times 2m + 3$

$5 + 2k = 4(1+m) + 3$

TSVP $\rightarrow$

$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

si n impaire alors $n+1$ et $n-1$ pairs

ou 2 parmi deux nombres pairs consécutifs, il y a un nombre divisible par 4 donc $n^2 - 1 = 8k_1$

62 p398 (note)

$2k$

$2k+2$

$$2(2m+1)+2 = 4m+2+2 = 4m+4 = 4(m+1)$$

2

(4-)

6

(8-)

10

(12)

si k est impair k n'est pas divisible par 2 $2k$ n'est pas divisible par 4

si k est pair $k=2m$ $2(2m)+2$

50 p 399

$$a \equiv 2(5) \text{ or } b \equiv 3(5)$$

$$a^2 \equiv 4(5) \quad b^2 \equiv 9(5)$$

$$\text{d'au } b^2 \equiv 4(5)$$

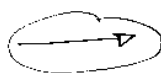
$$2b^2 \equiv 8(5)$$

$$\text{d'au } 2b^2 \equiv 3(5)$$

$$\text{d'au } a^2 + 2b^2 \equiv 7(5)$$

$$a^2 + 2b^2 \equiv 2(5)$$

56 p 399



$$\begin{aligned} \times 3 \downarrow 3^1 &= 7 \times 0 + 3 \rightarrow 3^{6k+1} \\ \times 3 \downarrow 3^2 &= 7 \times 1 + 2 \rightarrow 3^{6k+2} \\ \times 3 \downarrow 3^3 &= 7 \times 3 + 6 \rightarrow 3^{6k+3} \\ \times 3 \downarrow 3^4 &= 7 \times 11 + 4 \rightarrow 3^{6k+4} \\ \times 3 \downarrow 3^5 &= 7 \times 34 + 5 \rightarrow 3^{6k+5} \\ \times 3 \downarrow 3^6 &= 104 \times 7 + 4 \rightarrow 3^{6k+6} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

$$1998 = 285 \times 7 + 3$$

$$1998 \equiv 3(7)$$

$$1998^{128} \equiv 3^{128}(7)$$

$$128 = 21 \times 6 + 2 \rightarrow k = 21 \text{ d'au reste} = 2$$

58 p 399

a)

$$1 \quad 1 \equiv 1(8)$$

$$2 \quad 4 \equiv 4(8)$$

$$3 \quad 9 \equiv 1(8)$$

$$4 \quad 16 \equiv 0(8)$$

$$5 \quad 25 \equiv 1(8)$$

$$6 \quad 36 \equiv 4(8)$$

$$7 \quad 49 \equiv 1(8)$$

$$8 \quad 64 \equiv 0(8)$$

$$9 \quad 81 \equiv 1(8)$$

$$10 \quad 100 \equiv 4(8)$$

$$\text{si } n^2 \equiv 1(8)$$

$$(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16 \equiv 1(8)$$

$$\text{si } n^2 \equiv 4(8)$$

$$(n+4)^2 \equiv 4(8)$$

$$b) (n+3)^2 \equiv 1(8)$$

$$\text{soit } n+3 = 1+4k \quad (1; 5; 9; \dots) \quad \text{d'au } n = 4k-2$$

$$\text{soit } n+3 = 3+4k \quad (3; 7; 11; \dots) \quad \text{d'au } n = 4k$$

Wh p 398

$$m^2 + 2n = m^2 + 2m + 1 - 1 = (m+1)^2 - 1$$

$$n^2 + 2m = (m+1)(m+1) - 1$$

$$= (m+1) \times n + (n+1) - 1$$

$$= (n+1) \times m + (m)$$

63 p 400 type B1c

a)

$$\begin{aligned} 7 &\equiv 7(9) \quad (7 = 9 \times 0 + 7) \\ 7^2 &\equiv 4(9) \quad (49 = 9 \times 5 + 4) \\ 7^3 &\equiv 1(9) \quad (343 = 9 \times 38 + 1) \\ 7^4 &\equiv 7(9) \quad (2401 = 9 \times 266 + 7) \end{aligned}$$

$$7^{3k+1} \equiv 7(9)$$

$$7^{3k+2} \equiv 4(9)$$

$$7^{3k+3} \equiv 1(9)$$

b)

$$2005 = 9 \times 222 + 7$$

$$2005 \equiv 7(9)$$

$$2005^{2005} \equiv 7^{2005}(9)$$

$$\begin{aligned} 2005 &= 3 \times 668 + 1 \\ 2005 &= 2 \times k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } 7^{2005} \equiv 7(9)$$

2^e a)

$$10 \equiv 1(9)$$

$$10^n \equiv 1^n(9)$$

$$10^n \equiv 1(9)$$

b)

$$N = 10^k \times C_k + 10^{k-1} \times C_{k-1} + \dots + 10^1 C_1 + C_0$$

$$10^k \equiv 1(9)$$

$$10^k \equiv C_k(9)$$

$$\text{donc } N \equiv C_k + C_{k-1} + \dots + C_1 + C_0(9)$$

$$N \equiv S(9)$$

c) Si S divisible par 9 alors $S \equiv 0(9)$ donc $N \equiv S \equiv 0(9)$

3^e a)

$$\text{du fait de b) } A \equiv B(9)$$

$$\text{comme } B \equiv C(9)$$

$$\text{or } C \equiv D(9)$$

$$\text{donc } A \equiv D(9)$$

Trans

$$3b) 2005 < 10.000$$

$$2005^{2005} < 10.000^{2005} = (10^4)^{2005} = 10^{8020}$$

10.000^{2005} s'écrit avec un 1 et 8020 "0" soit 8021 chiffres

donc 2005^{2005} s'écrit au plus avec 1 chiffre de moins = 8020 chiffres

2005^{2005} s'écrit au plus : $\underbrace{99 \dots 9}_{8020 \text{ chiffres } 9}$

donc B est égal au plus à $8020 \times 9 = 72180$

c) si $B = 69999$ $C = 6 + 4 \times 9 = 42$ c'est le maximum de C

d) majorant de D = 12 ce qui correspond à C = 39

e) D a donc pour valeurs possibles : $0, 1, \dots, 12$

comme $A \equiv D(9)$ et que $A \equiv 7(9)$

donc $D \equiv 7(9)$ or parmi les valeurs possibles de D :

on a

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0(9) \\ 1 &\equiv 1(9) \\ 2 &\equiv 2(9) \\ 3 &\equiv 3(9) \\ 4 &\equiv 4(9) \\ 5 &\equiv 5(9) \\ 6 &\equiv 6(9) \\ 7 &\equiv 7(9) \\ 8 &\equiv 8(9) \\ 9 &\equiv 0(9) \\ 10 &\equiv 1(9) \\ 11 &\equiv 2(9) \\ 12 &\equiv 3(9) \end{aligned}$$

et il n'y a que 7 pour lequel $7 \equiv 7(9)$

donc $D = 7$